PART2　線対称の点，折れ線の長さの最小値

2　直線 l: $y=2x-3$ と点 A(5，2) がある。次の問いに答えよ。

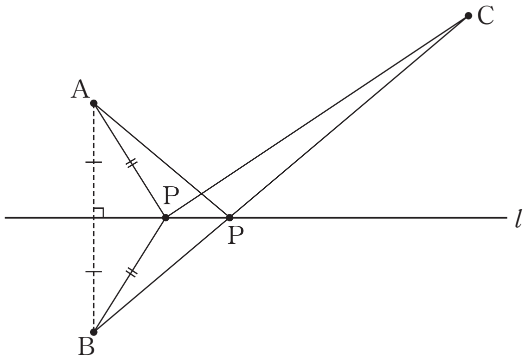
(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ。

(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の最小値を求めよ。また，点 C(6，6) に対して，AP+PC が最小となる点 P の座標を求めよ。

Point Pickup

直線 l に関して 2 点 A，B が対称　$\Longleftrightarrow$　$AB \perp l$　かつ　線分 AB の中点は直線 l 上

直線 l に関して点 A と対称な点 B をとる。このとき，直線 l 上の任意の点 P について，AP ＝ BP である。
よって，2 点 A，C が直線 l に関して同じ側にあるとき，AP+PC が最小になるのは，BP+PC が最小となるとき，すなわち 3 点 B，P，C が一直線上にあるときである。



第 4 講　PART2　確認問題

1　直線 l：$y=\frac{1}{2}x+2$ と点 A$(1,\ 5)$ がある。

(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ。

B(ア , イ)

(2)　直線 l 上を動く点を P とする。

(i)　AP の最小値を求めよ。

$\sqrt{\boxed{ウ}}$

(ii)　点 C$(6,\ 10)$ に対して，AP+PC が最小となる点 P の座標を求めよ。

P(エ , オ)

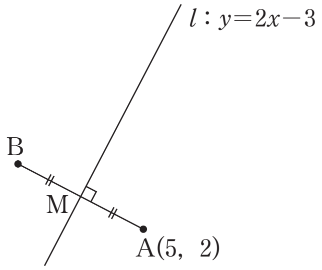
PART2　線対称の点，折れ線の長さの最小値

2　直線 l: $y=2x-3$ と点 A(5, 2) がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ。

(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の最小値を求めよ。また，点 C(6, 6) に対して，AP＋PC が最小となる点 P の座標を求めよ。

(1)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。



AB ⊥ l より　$2\cdot\dfrac{b-2}{a-5}=-1$

よって　$a+2b=9$ …… ①

線分 AB の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$ が直線 l 上にあることから

$\dfrac{b+2}{2}=2\cdot\dfrac{a+5}{2}-3$　　よって　$2a-b=-2$ …… ②

①，②より　$a=1$，$b=4$　　したがって　B(1, 4)

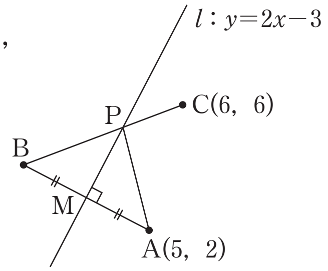
(2)　AP が最小となるのは，AP ⊥ l となるときで，このとき P は(1)より M(3, 3) と一致する。

よって，求める AP の最小値は　$\mathrm{AM}=\sqrt{(5-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

また，右図のように，2 点 A，C は直線 l に関して同じ側にあり，

$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}=\mathrm{BP}+\mathrm{PC}\geqq \mathrm{BC}$

より，3 点 B，P，C が一直線上にあるとき，AP＋PC は最小となり，このとき，点 P は直線 BC と直線 l の交点である。



直線 BC の方程式は $y=\dfrac{6-4}{6-1}(x-1)+4$　つまり　$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{18}{5}$

これと直線 l の方程式を連立させて解くと　$x=\dfrac{33}{8}$，$y=\dfrac{21}{4}$

したがって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{33}{8},\ \dfrac{21}{4}\right)$

第 4 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：1，ウ：5，エ：4，オ：4

[解説]

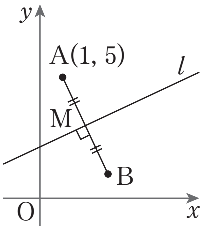
(1)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

$AB \perp l$ より [A]

$$\frac{b-5}{a-1}\cdot\frac{1}{2}=-1 \quad \text{[B]}$$

よって

$$b=-2a+7 \quad \cdots\cdots ①$$



線分 AB の中点 $M\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+5}{2}\right)$ が直線 l 上にあることから [C]

$$\frac{b+5}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}+2$$

よって　$2b=a-1$　……②

①，②より　$a=3$，$b=1$

ゆえに　**B(3，1)**

[A]
直線 l に関して 2 点 A，B が対称
$\Longleftrightarrow$
$AB \perp l$ かつ 線分 AB の中点が直線 l 上

[B]　2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が
垂直 $\Longleftrightarrow m_1m_2=-1$

[C]　2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB の中点の座標は
$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(2) (i) AP が最小となるのは，AP $\perp l$ となるときである。

このとき，点 P は(1)の M と一致する。

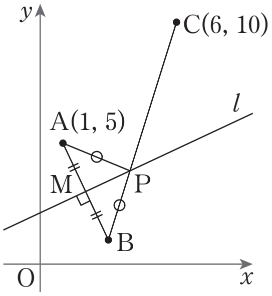
M の座標は

$$\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) \text{ すなわち } (2,\ 3)$$

よって，求める AP の最小値は

$$\mathrm{AM}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$$

(ii) 右図のように，2 点 A，C は直線 l に関して同じ側にあり，



$$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}=\mathrm{BP}+\mathrm{PC}\geqq \mathrm{BC}$$

であるから，3 点 B，P，C が一直線上にあるとき，AP+PC は最小となる。 [D]

このとき，点 P は直線 BC と直線 l の交点である。

直線 BC の方程式は

$$y-1=\frac{10-1}{6-3}(x-3)$$

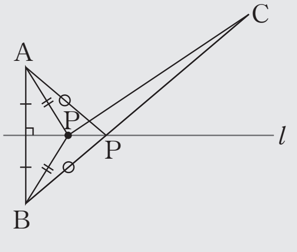
ゆえに　$y=3x-8$

これと直線 l の方程式を連立して解くと

$$x=4,\ y=4$$

よって　**P(4, 4)**

[D]　次図のように，2 点 A，B が直線 l に関して対称であり，2 点 A，C が l に関して同じ側にあるとき，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}=\mathrm{BP}+\mathrm{PC}\geqq \mathrm{BC}$$

より，AP+PC が最小になるのは，3 点 B，P，C が一直線上にあるときである。